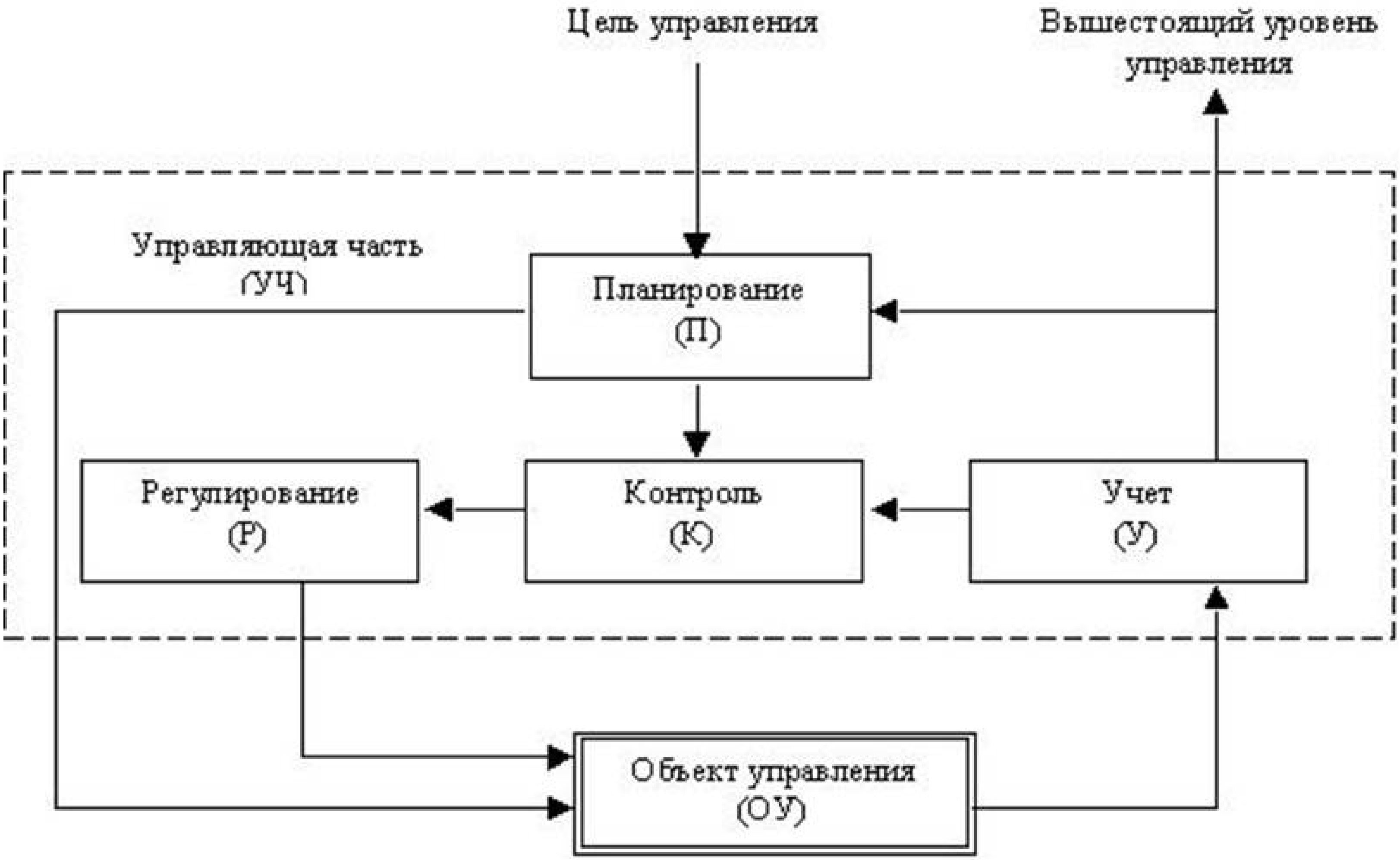
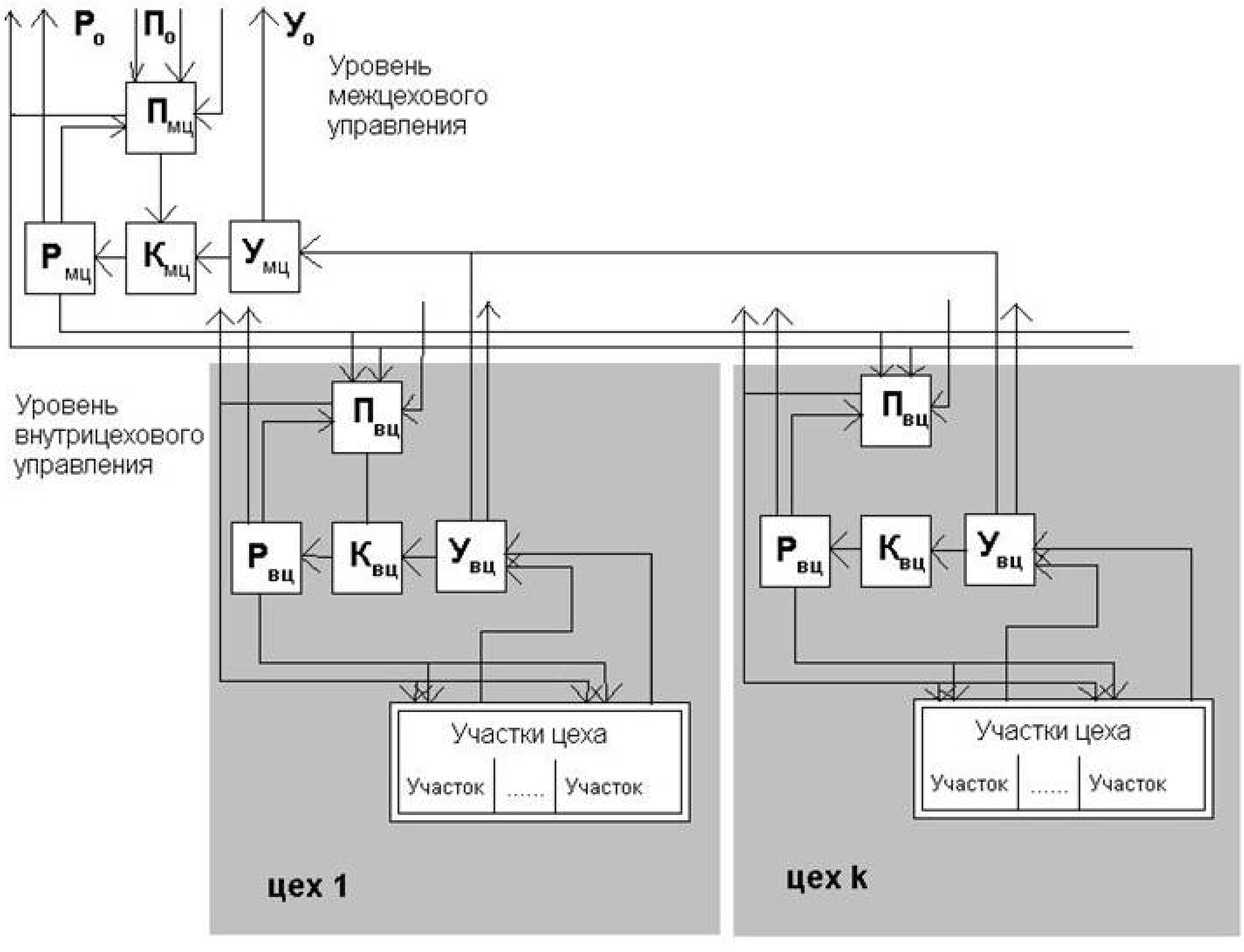
Перспективы применения алгебр календарного планирования для построения графиков производства в условиях MES

Ю.Н. Кондрашов, д.т.н.,проф.
А.Л. Рыжко, к.э.н., доц.
Академия бюджета и казначейства Министерства финансов РФ,
Московский авиационный институт (государственный технический университет)

Функциональный управляющий блок (ФУБ)



Иерархия управления ФУБами



$\sum_{j=1}^{3} a_j$

Координаты контроля производственного процесса

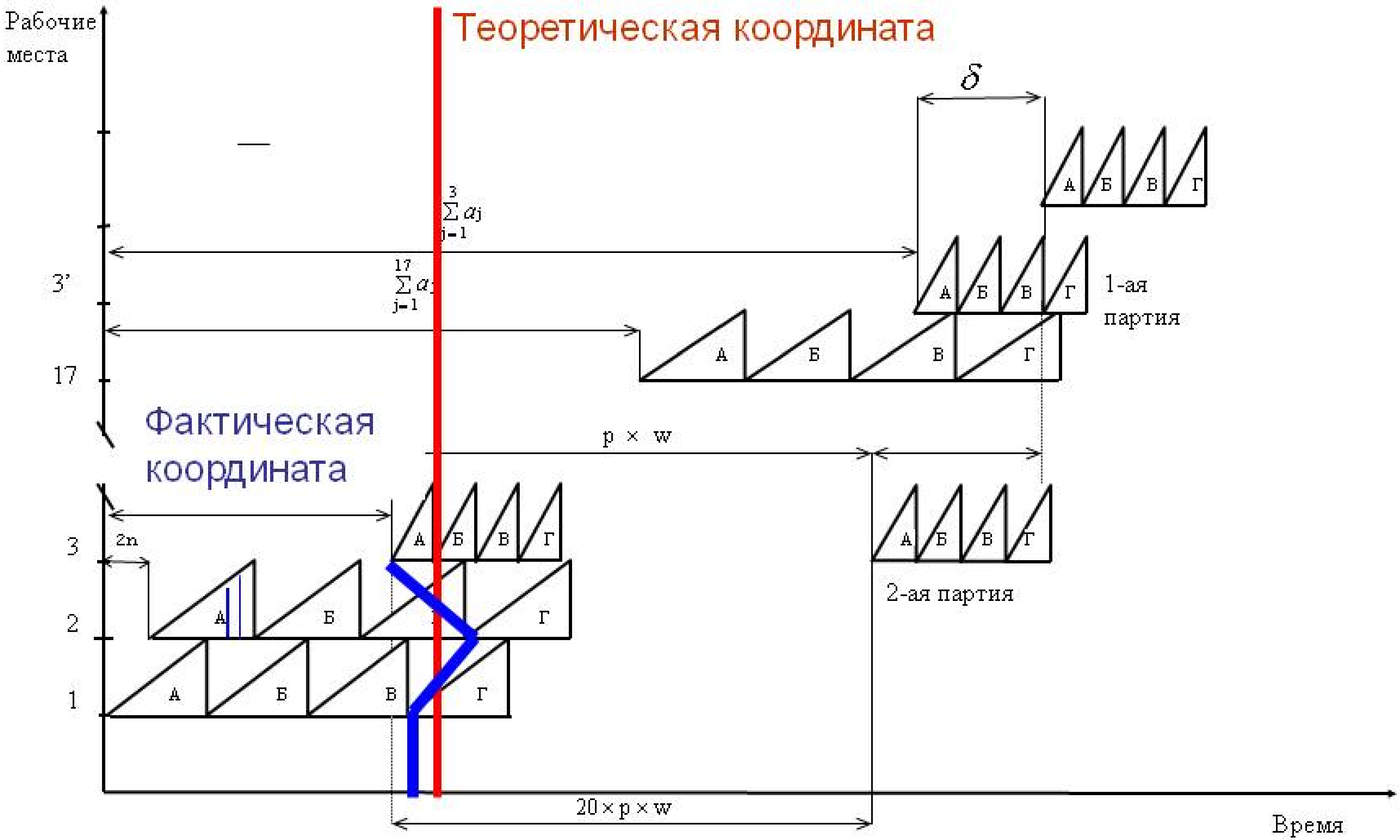
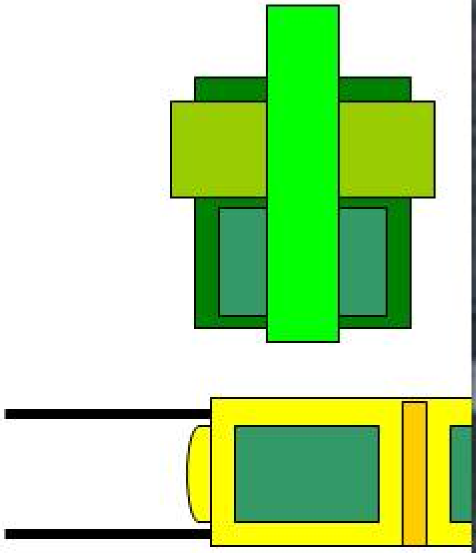
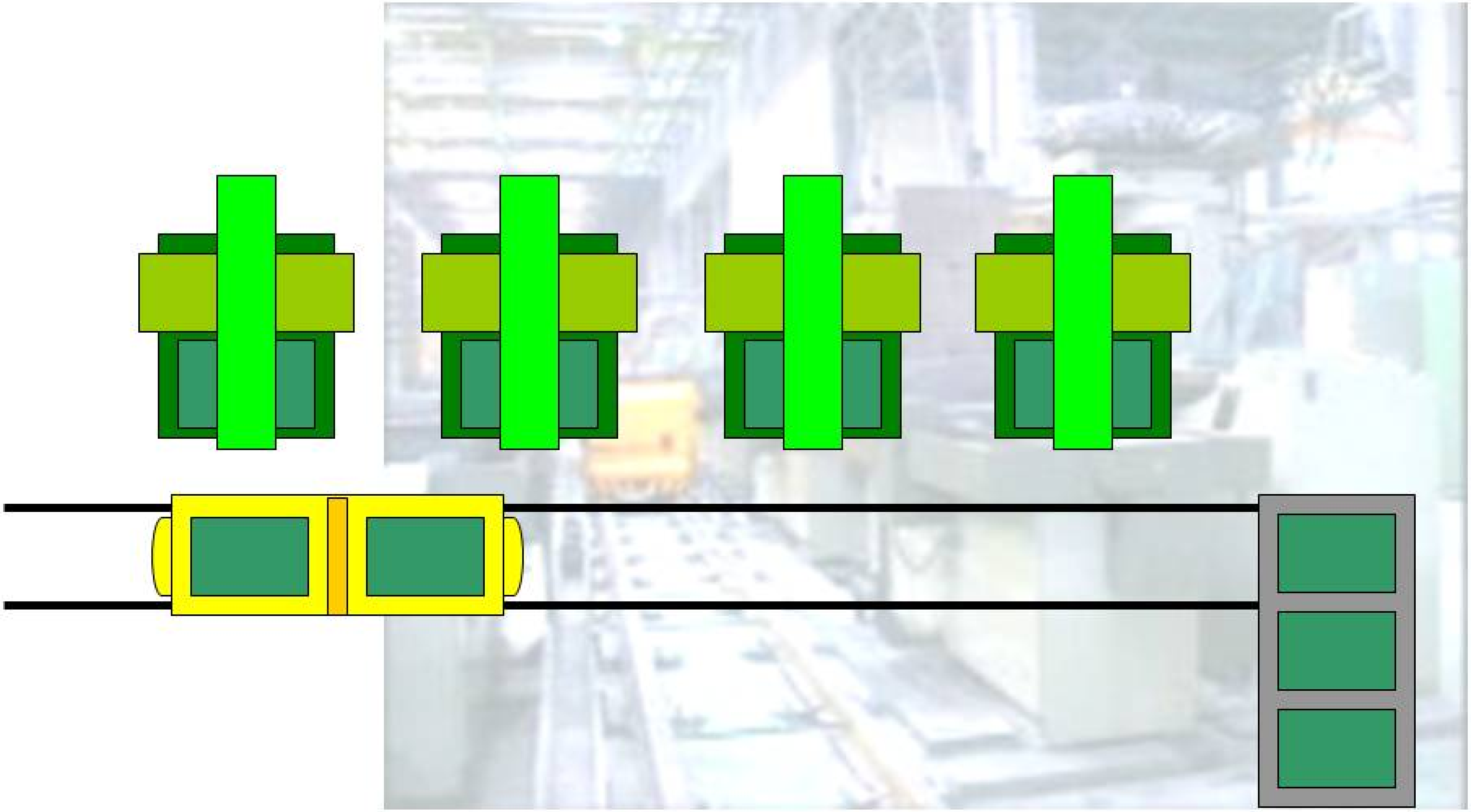


Схема движения деталей по рабочим местам

Примерная схема ГПК



Примерная схема ГПК



Алгебра календарного планирования

Б. Гиффлер

Giffler B. Schedule Algebras and Their Use in Formulating General Systems Simulating, 1963

Wongseelashote A.-----1976

Генетические алгоритмы-------1995

Алгебра календарного планирования

Б. Гиффлер

$$U^{\mathfrak{A}} = < \mathscr{U}, \Omega_{\mathfrak{A}} >$$

где $\mathscr{U}$ - множество матриц предшествования;

$\Omega_{\mathfrak{A}}$ - сигнатура алгебры.

$$\mathscr{U} = \left\{A^{w} : w = \overline{0, \lambda}\right\}$$

$$\Omega_{\mathfrak{A}} = \{\oplus, \otimes\}$$

Алгебра календарного планирования

$$\mathfrak{A} = \left\{ A^w : w = \overline{0, \lambda} \right\}$$

$$a_{ij} = S_{ij} = \left\{ s_{ijk} \right\} = \mathfrak{S}$$

$$V^{\mathfrak{S}} = < \mathfrak{S}, \Omega_{\mathfrak{S}} >$$

где $\mathfrak{S}$ - множество оценок отношений предшествования;
$\Omega_{\mathfrak{S}}$ - сигнатура алгебры.

$$\Omega_{\mathfrak{S}} = \left\{ \oplus, \otimes \right\}$$

Алгебра календарного планирования

$$s_{ijk} = t_{ij} \text{ по пути } k$$

$$s_{ijk} = 0, \text{ если } t_{ij} = 0$$

$$s_{ijk} = "-", \text{ если нет пути от } i \text{ к } j$$

Алгебра календарного планирования

$$\Omega_{\mathfrak{G}} = \{\oplus, \otimes\}$$

Сложение множеств оценок предшествования

1. Объединяются элементы обоих множеств
2. Противоположные элементы заменяются прочерками
3. Если есть значащий элемент, то вычеркиваются все прочерки. Если все прочерки, то они заменяются одним прочерком

Алгебра календарного планирования

$$\Omega_{\mathcal{G}} = \{\oplus, \otimes\}$$

Умножение множеств оценок предшествования

$$s^{2}{}_{ijk} = (t_{il} + t_{lj})_{k}$$

$$S^{2}{}_{ijk} = \sum_{l} (s^{1}_{ilk} \otimes s^{1}_{ljk})$$

$$S^{w}{}_{ijk} = \sum_{l} (s^{w-1}_{ilk} \otimes s^{1}_{ljk})$$

Алгебра календарного планирования

Формирование расписания (календарного плана)

$$A^{\lambda} = T^{0} \otimes A^{\lambda-1}$$

$$A^{\lambda-1} = T^{0} \otimes A^{\lambda-2}$$

....

$$A^{2} = T^{0} \otimes A^{1}$$

$$T = \sum_{w} (A^{w})$$

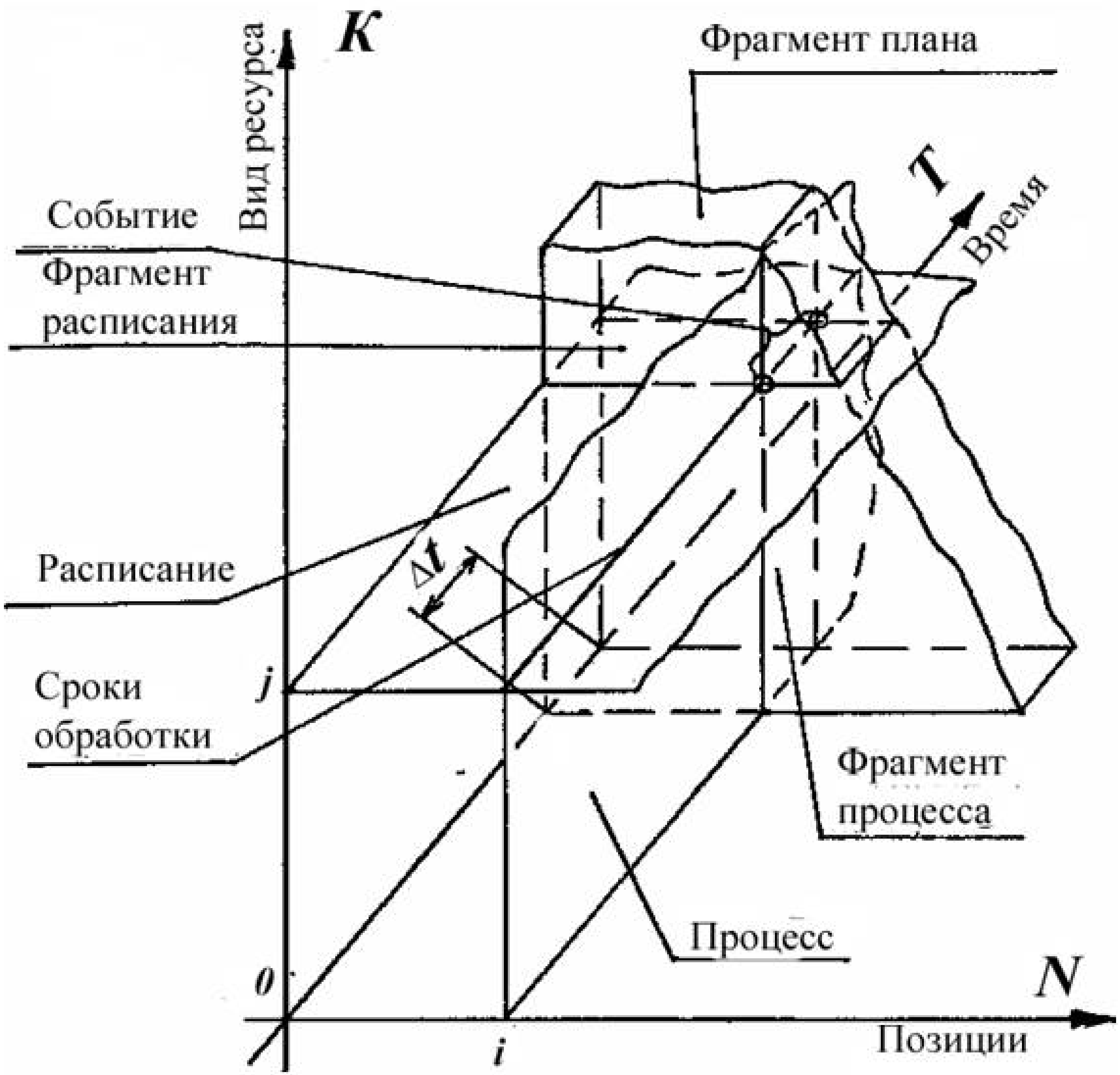
$$A^{\lambda+1} = A^{0}$$

Алгебра календарного планирования

Все методы построения календарного графика можно разделить на четыре группы:

- имитационное построение графика;
- построение графика путем перебора рабочих мест;
- позиционное построение графика путем перебора позиций плана;
- параллельный расчет.

Канонический календарный план



Алгебра календарного планирования

Алгебра календарного планирования (АКП) может быть реализована в трех видах:

- алгебра расписаний (АР),
- алгебра процессов (АП),
- алгебра фрагментов плана (АФ).

Алгебра расписаний

$$\boldsymbol{U}^{\mathfrak{P}} = < \mathfrak{P}, \Omega^{\mathfrak{P}} >$$

$$\mathfrak{P} = \left\{ P_j : j = \overline{1, m} \right\}$$

$$\Omega^{\mathfrak{P}} = \left\{ \oplus, \otimes, \tilde{\cup}, \tilde{\cap}, \cup, \cap \right\}$$

Алгебра расписаний

Расписание (информационный объект)

<table>
<tr><td colspan="4">Идентификатор расписания P_j</td></tr>
<tr><td colspan="4">Идентификатор (номер) рабочего места j</td></tr>
<tr><td colspan="4">Количество деталей в партии N_j</td></tr>
<tr><td>Номер очереди обработки</td><td>Код партии деталей</td><td>Срок начала обработки</td><td>Срок окончания обработки</td></tr>
<tr><td>1
2
3
. . .
i
. . .
n-1
n</td><td>q_1
q_2
q_3
. . .
q_i
. . .
q_{n-1}
q_n</td><td>a_{1j}
a_{2j}
a_{3j}
. . .
a_{ij}
. . .
$a_{n-1\,j}$
a_{nj}</td><td>b_{1j}
b_{2j}
b_{3j}
. . .
b_{ij}
. . .
$b_{n-1\,j}$
b_{nj}</td></tr>
</table>

Алгебра расписаний

Сложение расписаний

$$P_j = P_j^{н} \oplus P_p$$

где P_j - расписание использования j-го вида ресурса, увязанное по срокам с расписанием использования p-го вида ресурса, потребляемого непосредственно до (после) потребления данного, j-го вида ресурса;

$P_j^{н}$ - расписание использования j-го вида ресурса, не увязанное по срокам с расписанием использования p-го вида ресурса;

$\oplus$ - символ операции сложения расписаний;

P_p - расписание использования p-го вида ресурса, потребляемого непосредственно до (после) потребления данного, j-го вида ресурса.

Алгебра расписаний

Сложение расписаний

$$P_j = P_j^{н} \oplus P_p$$

где P_j - расписание обработки партий деталей на j-ом рабочем месте, увязанное по срокам с расписанием обработки партий деталей на p-ом рабочем месте, подающем детали на j-ое.

$P_j^{н}$ - расписание обработки партий деталей на j-ом рабочем месте, не увязанное по срокам с расписанием обработки партий деталей на p-ом рабочем месте;

P_p - расписание обработки партий деталей на p-ом рабочем месте, подающем детали на данное, j-е.

Алгебра расписаний

Формирование нейтрального расписания

$$a_{ij} = \sum_{q=0}^{q=i\ 1} t_{jq_i};$$

$$b_{ij} = \sum_{q=0}^{q=i} t_{jq_r};$$

$$\{q_i\}_j = \left\langle \textit{состав позиций плана} \right\rangle;$$

n_j = <количество позиций плана>;
j = <номер рабочего места>;
P_j = <новый идентификатор расписания>;
где время обработки партии деталей q_i-го наименования на j-м рабочем месте;

Алгебра расписаний

Сложение расписаний (пример реализации)

$$s_{jk}^{p} = \max \left\{ \left\{ \sum_{q=0}^{i} t_{pq} - \sum_{q=0}^{i} t_{jq}, \sum_{q=0}^{i-1} t_{pq} - \sum_{q=0}^{i-1} t_{jq} \right\} \right\},$$

где s_{jk}^{p} - срок начала выполнения операции (смещение), исчисленный относительно начала выполнения работ на р-ой операции, подающей предметы труда для обработки на j -ю операцию;

$\sum_{q=0}^{i} t_{pq}$ - сумма времени обработки деталей в очередности обработки от первой до текущей i-ой на данной, j-ой. операции;

$\sum_{q=0}^{i} t_{jq}$ - сумма времени обработки деталей в очередности обработки от первой до текущей i-ой на р-ой операции, подающей предметы труда на данную операцию;

$\sum_{q=0}^{i-1} t_{pq}$ - сумма времени обработки деталей в очередности обработки от первой до предыдущей очередной, (i-1)-ой, на данной, j-ой, операции;

$\sum_{q=0}^{i-1} t_{jq}$ - сумма времени обработки деталей в очередности обработки от первой до предыдущей очередной, (i-1)-ой, на р-ой операции.

Алгебра расписаний

Сложение расписаний (пример реализации)

$$S_{jk}^{1p} = S_{jk}^{p} + S_{pk_p}^{1}; \qquad S_{jk}^{1} = \max_{p}\left\{S_{jk}^{1p}\right\}$$

где S_{jk}^{1p} - смещение начала обработки первой партии деталей на j-м рабочем месте относительно начала обработки первой партии деталей на первом рабочем месте, определяемое увязкой по срокам обработки партий деталей, передаваемых с p-го рабочего места;

S_{jk}^{p} - смещение начала обработки первой партии деталей на j-ом рабочем месте относительно начала обработки первой партии деталей на p-м рабочем месте;

$S_{pk_p}^{1}$ - смещение начала обработки первой партии деталей на p-м рабочем месте относительно начала обработки первой партии деталей на первом рабочем месте;

S_{jk}^{1} - смещение начала обработки первой партии деталей на j-м рабочем месте относительно начала обработки первой партии деталей на первом рабочем месте, определяемое всеми технологическими связями рабочего места j с подающими детали рабочими местами.

Алгебра расписаний

Сложение расписаний (пример реализации)

$$a_{1j} = a_{1p} + \max\left\{ \sum_{q=0}^{i} t_{pq} - \sum_{q=0}^{i} t_{jq}, \sum_{q=0}^{i-1} t_{pq} - \sum_{q=0}^{i-1} t_{jq} \right\}$$

$$a_{ij} = a_{1j} + \sum_{q=1}^{q=i-1} t_{jq}, \; i = \overline{2, n_j^H}$$

$$b_{ij} = a_{1j} + \sum_{q=1}^{q=i} t_{jq}, \; i = \overline{1, n_j^H}$$

$$\{q_i\}_j = \{q_i\}_j^H$$

$$j = j^H$$

$$N_j = N_j^H$$

$$P_j = \langle \textit{новый идентификатор расписания} \rangle$$

Алгебра расписаний

Сложение расписаний (пример реализации)

Так как $t_{ij} = b_{ij} - a_{ij}$, то

$$a_{1j} = \max_i \left\{ a_{ip} - a_{ij}^{H}, b_{ip} - b_{ij}^{H}, 0 \right\} + a_{1p};$$

$$a_{ij} = a_{1j} - a_{1j}^{H} + a_{ij}^{H}; \quad i = \overline{2, n_j^{H}};$$

$$b_{ij} = a_{1j} - a_{1j}^{H} + b_{ij}^{H}; \quad i = \overline{1, n_j^{H}};$$

Алгебра расписаний

Специальное объединение расписаний

$$P_j = P_j^1 \tilde{\bigcup} P_j^2 ;$$

где P_j - расписание обработки партий деталей на j-ом рабочем месте, увязанное по срокам с расписанием обработки партий деталей на p-ом рабочем месте, подающем детали на j-ое.

P_j^1 и P_j^2 - расписания обработки партий деталей на j-ом рабочем месте, увязанные по срокам с расписанием обработки партий деталей на разных рабочих местах, подающих детали на данное, j-е.

$\tilde{\bigcup}$ - символ операции специального объединения.

Алгебра расписаний

Специальное объединение расписаний

$$a_{1j} = \max\left\{a_{1j}^1, a_{1j}^2\right\},$$

$$a_{ij} = a_{1j} - a_{1j}^H + a_{ij}^H; \quad i = \overline{2, n_j^H};$$

$$b_{ij} = a_{1j} - a_{1j}^H + b_{ij}^H; \quad i = \overline{1, n_j^H};$$

$$\{q_i\}_j = \{q_i\}_j^H$$

$$j = j^H$$

$$N_j = N_j^H$$

$$P_j = \text{< новый идентификатор расписания >}$$

Алгебра расписаний

Формирование расписаний

$$P_j = \tilde{\bigcup_{\beta/j}} \left(P_j^{н} \oplus P_p \right), \quad P_p \in \beta / j$$

где $\tilde{\bigcup\limits_{\beta/j}}$ - операция-квантор попарного объединения всех расписаний из множеств β / j

β / j - множество рабочих мест, подающих детали на данное, j-е, рабочее место.

Алгебра процессов

$$\boldsymbol{U}^{\mathfrak{S}} = < \mathfrak{S}, \Omega^{\mathfrak{S}} >$$

$$\mathfrak{S} = \left\{ S_i \ : i = \overline{1,n} \right\}$$

$$\Omega^{\mathfrak{S}} = \left\{ \oplus, \otimes, \tilde{\cup}, \tilde{\cap}, \cup, \cap \right\}$$

Алгебра процессов

Процесс

<table>
<tr><td colspan="4">Идентификатор процесса S_i</td></tr>
<tr><td colspan="4">Код партии, деталей i</td></tr>
<tr><td colspan="4">Количество рабочих мест k_i</td></tr>
<tr><td>Номер операции</td><td>Номер рабочего места</td><td>Срок начала обработки</td><td>Срок окончания обработки</td></tr>
<tr><td>1</td><td>h_1</td><td>a_{i1}</td><td>b_{i1}</td></tr>
<tr><td>2</td><td>h_2</td><td>a_{i2}</td><td>b_{i2}</td></tr>
<tr><td>3</td><td>H_3</td><td>a_{i3}</td><td>b_{i3}</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>j</td><td>h_j</td><td>a_{ij}</td><td>b_{ij}</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>k_i-l</td><td>h_{k-1}</td><td>a_{ik-1}</td><td>b_{ik-1}</td></tr>
<tr><td>k_i</td><td>h_k</td><td>a_{ik}</td><td>b_{ik}</td></tr>
</table>

Алгебра процессов

Сложение процессов

$$S_i = S_r \oplus S_i^{н}$$

S_i - процесс выполнения работ с i-й позицией плана, увязанный по срокам с процессом выполнения работ с r-й позицией плана, причем предполагается, что партия деталей i -го наименования обрабатывается на всех рабочих местах непосредственно после партии деталей r-го наименования;

S_r - процесс выполнения работ с r-й позицией плана на всех рабочих местах участка;

$S_i^{н}$ - процесс выполнения работ с i-й позицией плана, не увязанный по срокам с процессом выполнения работ с r-й позицией плана. В нашем примере является процессом обработки партии деталей i -го наимено-вания, не увязанным по срокам с процессом обработ-ки партии деталей r-го наименования на совпадаю-щих рабочих местах технологического маршрута.

Алгебра процессов

Сложение процессов

$$a_{ij} = \max_{p}\left\{b_{rj},\, a_{ij}^{H} - a_{ip}^{H} + b_{rp}\right\} \quad p \in \beta/j;$$

$$b_{ij} = a_{ij} + b_{ij}^{H} - a_{ij}^{H};$$

$$\{h_j\}_i = \{h_j\}_i^{H};$$

$$m_i = m_i^{H};$$

$$i = i^{H};$$

$$S_i = \langle \textit{новый идентификатор процесса} \rangle;$$

Алгебра процессов

Специальное объединение процессов

$$S_i = S_i^1 \,\widetilde{\bigcup}\, S_i^2 ;$$

где S_i - процесс выполнения работ с i-й позицией плана, увязанный по срокам с процессом выполнения работ со всеми предыдущими позициями плана.

S_i^1 и S_i^2 - процессы выполнения работ с i-й позицией плана, увязанные по срокам с процессом выполнения работ с разными предыдущими позициями плана (сборочная операция).

$\widetilde{\bigcup}$ - символ операции специального объединения.

Алгебры АП и АР

Преобразование системы расписаний к системе процессов

$$\mathfrak{H} = \left\{ S_i : i = \overline{1, n} \right\}$$

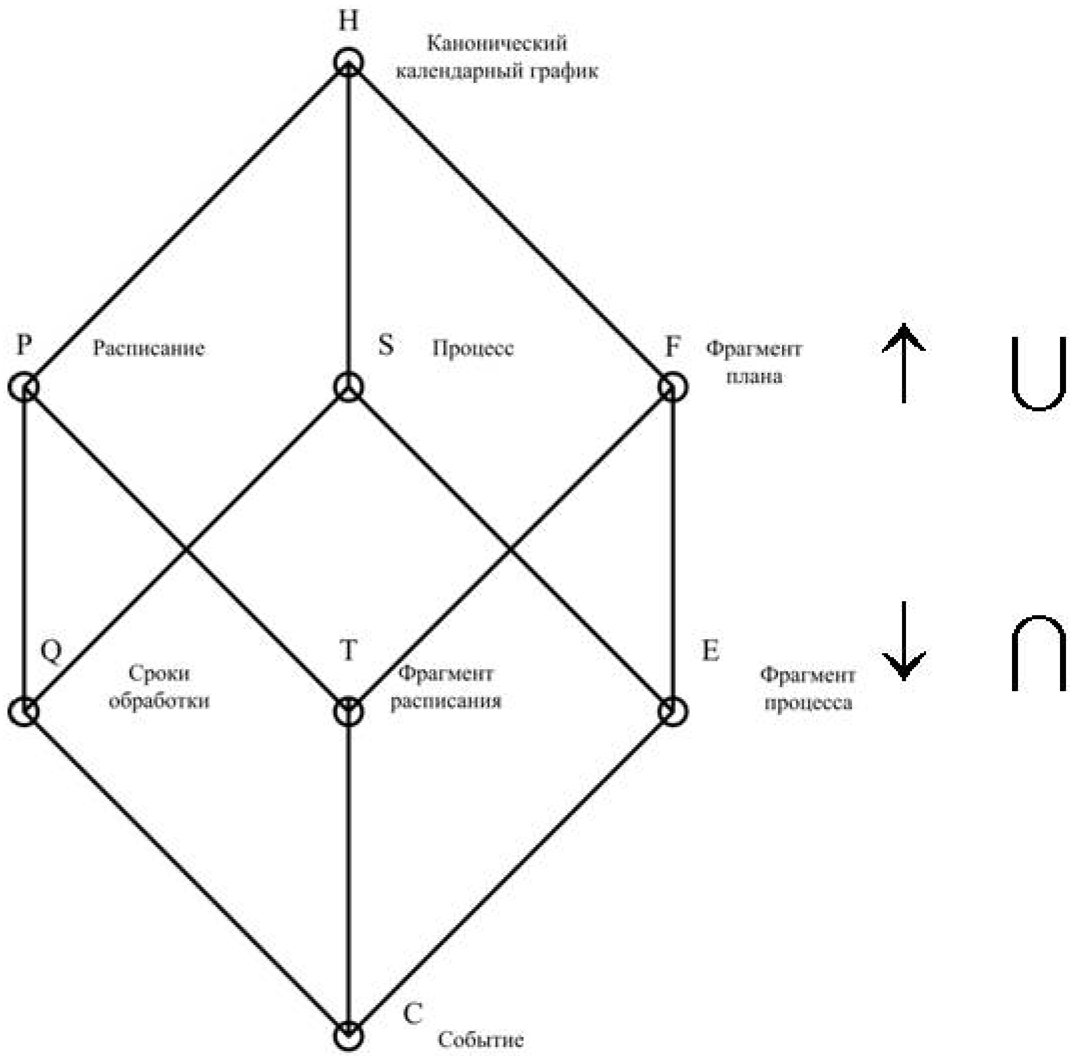
$$\mathfrak{H} = \left\{ P_j : j = \overline{1, m} \right\}$$

$$\mathfrak{H} = \left\{ H \right\}$$

Нахождение процесса в системе расписаний

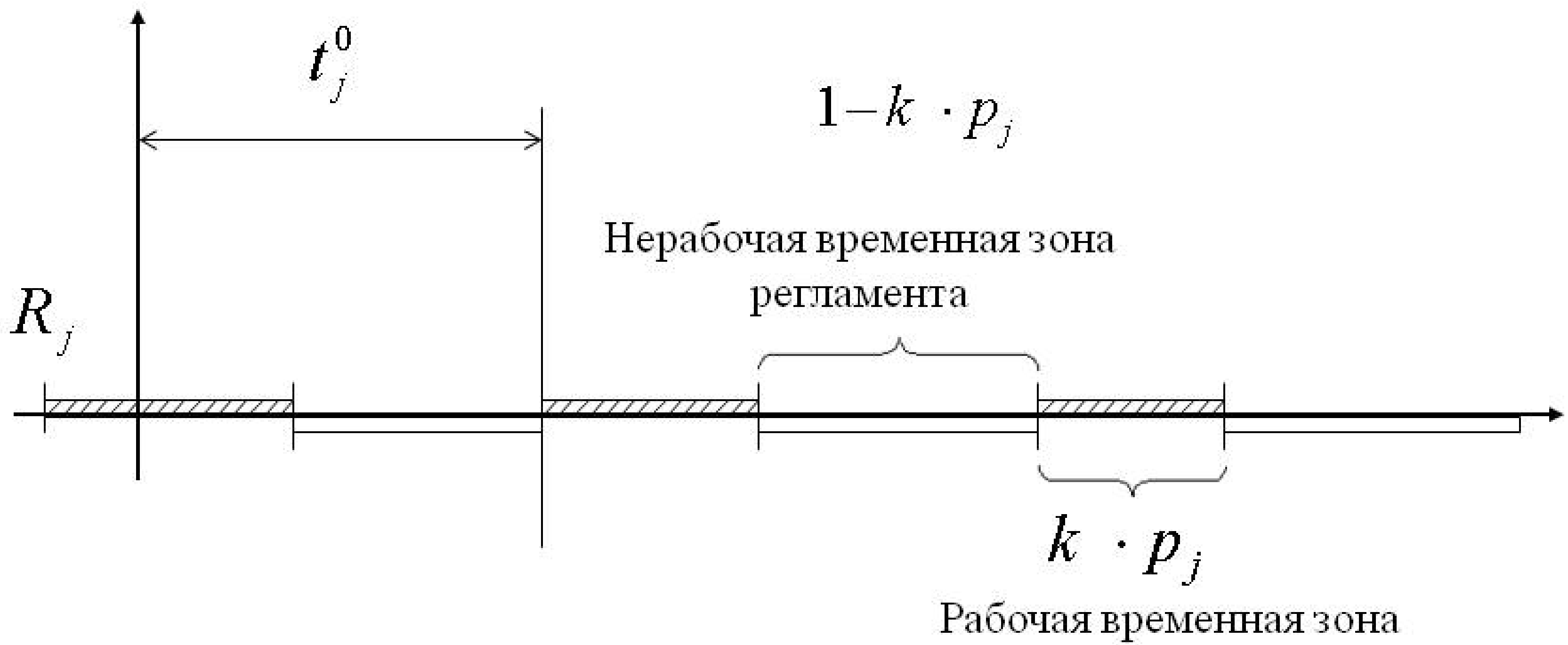
$$S_i = S_i^0 \,\widetilde{\bigcap}\left(\bigcup_j P_j \to H \right)$$

Система алгебр КП



Алгебра расписаний

Регламентное расписание



Алгебра расписаний

Умножение расписаний

$$a_j^{нр} = \left[\frac{a_j^{н} + p_j - t_j^0}{k_j \cdot p_j}\right] \cdot p_j + \left\{\frac{a_j^{н} + p_j - t_j^0}{k_j \cdot p_j}\right\} \cdot k_j \cdot p_j - \left(p_j - t_j^0\right)$$

где $a_j^{н}$ - любой из параметров расписания $a_{ijH}^{H}, a_{ij}^{H}, b_{ijH}^{H}, b_{ij}^{H}$

фигурными скобками здесь и далее обозначена дробная часть числа.

$$P_j = R_j \otimes P_j^{H}$$

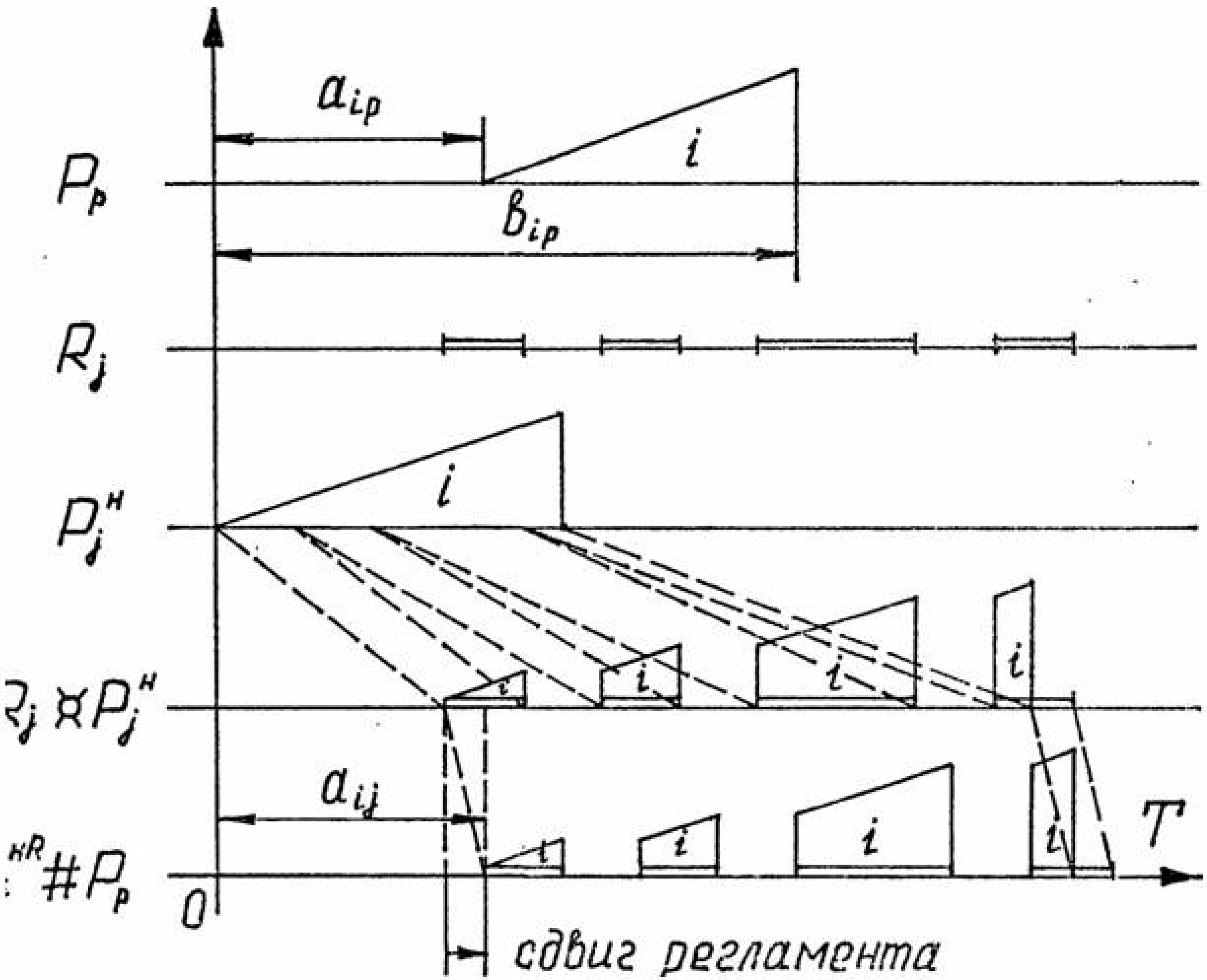
Алгебра расписаний

Формирование расписания согласно одной технологической связи

$$P_j = \left(R_j \otimes P_j^H\right) \oplus P_p$$

Алгебра расписаний

Регламентное расписание



Алгебра расписаний

Равенство расписаний

Определение 1.
Два расписания P_l и P_k считаются равными, если справедливы соотношения:

$$n_l = n_k$$

$$\{q_i\} \cdot l = \{q_i\} \cdot k$$

$$a_{il} = a_{ik}, i = \overline{1, n_l}$$

$$b_{il} = b_{ik}, i = \overline{1, n_l}$$

Алгебра расписаний

Дистрибутивность умножения расписаний

Теорема 1. Оператор "умножение расписания на регламент" "дистрибутивен" относительно оператора "сложение расписаний" так, что если $P_3 = P_1 \oplus P_2$, то

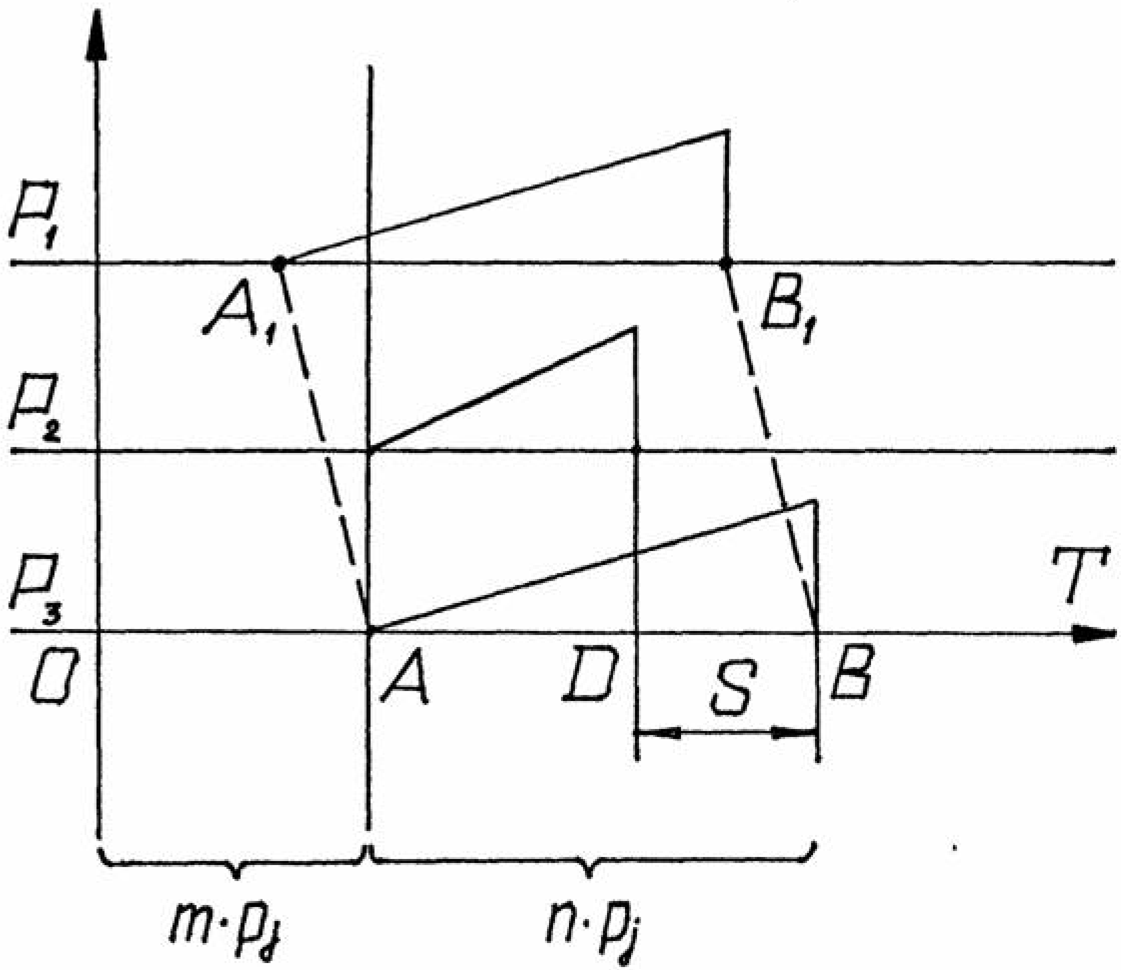
$$R \otimes P_3 = \left(R \otimes P_1\right) \oplus \left(R \otimes P_2\right)$$

при $P_3 = P_1$

Алгебра расписаний

Дистрибутивность умножения расписаний

Теорема 1.



Алгебра расписаний

Обратное расписание

Теорема 2. В АР относительно оператора "умножение расписания на регламент" существует левый обратный элемент. Для него справедливо

$$R^{-1} \otimes \left(R \otimes P\right) = P$$

Алгебра расписаний

Умножение расписаний

$$a_j^{нр} = \left[\frac{a_j^н + p_j - t_j^0}{k_j \cdot p_j}\right] \cdot p_j + \left\{\frac{a_j^н + p_j - t_j^0}{k_j \cdot p_j}\right\} \cdot k_j \cdot p_j - \left(p_j - t_j^0\right)$$

где $a_j^н$ - любой из параметров расписания $a_{ijH}^H, a_{ij}^H, b_{ijH}^H, b_{ij}^H$

Для умножения на обратный регламент (деление)

$$p_j = k_j \cdot p_j;$$

$$k_j^{-1} = \frac{1}{k_j};$$

$$t_j^{0^{-1}} = t_j^0 - \left(1 - k_j\right) \cdot p_j$$

Алгебра расписаний

Следствие наличия обратного расписания

Следствие. . Если $P = R_j \otimes P_0$,
где R_j - регламент работы на j - м рабочем месте и $k_j < 1$
то $R_j \otimes \left(R_j^{-1} \otimes P\right) = P$

Алгебра расписаний

Насыщение справа сложения расписаний

Теорема 3. Оператор "сложение расписаний" обладает свойством "насыщения справа" так, что

$$\left(P_1 \oplus P_2\right) \oplus P_2 = P_1 \oplus P_2$$

Алгебра расписаний

Эквивалентные преобразования расписания

Теорема 4. В алгебре АР справедливо

$$P_j = \left(R_j \otimes P_j^H\right) \oplus P_p =$$

$$= R_j \otimes R_j^{-1} \otimes \left(R_j \otimes P_j^H\right) \oplus R_j \otimes R_j^{-1} \otimes P_p =$$

$$= R_j \otimes \left(\left(R_j^{-1} \otimes R_j \otimes P_j^H\right) \oplus \left(R_j^{-1} \otimes P_p\right)\right) =$$

$$= R_j \otimes \left(P_j^H \oplus \left(R_j^{-1} \otimes P_p\right)\right)$$

Если $P_j = R_j \otimes P_j^H$

Алгебра расписаний

Формирование расписания в регламенте

Теорема 5. В алгебре АР равенство

$$P_j = R_j \otimes \left(P_j^H \oplus \left(R_j^{-1} \otimes P_p\right)\right)$$

Верно для любых P_j $и$ P_j^H

Алгебра календарного планирования

- ✓Основа структуризации объектноориентированного программного обеспечения решения задач календарного планирования
- ✓Основа синтеза различных процедур построения календарного плана в единой методике
- ✓Возможность решения новых задач календарного планирования за счет упрощения функциональных зависимостей
- ✓Использование различных реализаций процедур построения графиков без изменения общей методики формирования календарного плана

Спасибо за внимание

end